10.6 Shodná zobrazení

Základní úlohy

33 Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod M ($M \notin p$, $M \notin q$). Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo: $X \in p$, $Y \in q$ a bod M je střed úsečky XY.

34 Jsou dány dvě různoběžky p, q a kružnice k. Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo $X \in k$, $Y \in p$, úsečka XY je kolmá na přímku q a střed úsečky XY leží na přímce q. Zvolte postupně vzájemnou polohu kružnice a přímek tak, aby úloha měla 2, resp. 1, resp. 0 řešení.

35 Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod M ($M \notin p$, $M \notin q$). Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo $X \in p$, $Y \in q$, $|\sphericalangle XMY| = 60°$, $|MX| = |MY|$. Zvolte postupně vzájemnou polohu přímek p, q tak, aby úloha měla 2, resp. 1 řešení. Při jaké vzájemné poloze p, q, M má úloha nekonečně mnoho řešení?

36 Je dána kružnice k a přímka p ($k \cap p = \emptyset$). Dále je dána úsečka AB. Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo $X \in k$, $Y \in p$, úsečka XY je rovnoběžná s úsečkou AB a je stejně dlouhá jako úsečka AB. Zvolte postupně vzájemnou polohu kružnice a přímky tak, aby úloha měla 4, resp. 3, resp. 2, resp. 1, resp. 0 řešení.

Další úlohy

37 Je dána úsečka OP, $|OP| = 4\,\text{cm}$. Sestrojte kružnici $k(O;\, 2{,}5\,\text{cm})$ a přímku p, $p \perp OP \wedge P \in p$. Dále sestrojte jeden bod M, pro který platí $|OM| = 3\,\text{cm}$ a $|\sphericalangle POM| = 30°$.

Sestrojte všechny čtverce $ABCD$ tak, aby platilo $A \in k \wedge C \in p \wedge M = S$, kde S je střed čtverce $ABCD$.

38 Je dána přímka p, kružnice k a bod M. Vzájemnou polohu p, k, M volte stejně, jako v úloze 37.
Sestrojte všechny čtverce $ABCD$ tak, aby platilo $B \in k \wedge D \in p \wedge A = M$.

39 Je dána přímka p, kružnice k a bod M. Vzájemnou polohu p, k, M volte stejně jako v úloze 37.
Sestrojte všechny čtverce $ABCD$ tak, aby platilo
$A \in k \wedge C \in p \wedge BD \subset \leftrightarrow PM$.

40 Je dána přímka p, kružnice k a bod M. Vzájemnou polohu p, k, M volte stejně jako v úloze 37.
Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC tak, aby platilo $C \in k \wedge \wedge B \in p \wedge A = M$.

41 Je dána přímka p, kružnice k a bod M. Vzájemnou polohu p, k, M volte stejně jako v úloze 37.
Sestrojte všechny rovnoběžníky $MOKL$ tak, aby platilo $K \in k \wedge L \in p$.

42 Je dána přímka p, kružnice k a body P, M. Vzájemnou polohu p, k, P, M volte stejně jako v úloze 37.
Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky ABC se základnou AB tak, aby platilo $B \in k \wedge A \in p \wedge v_c \subset \leftrightarrow PM \wedge C = M$.

43 Je dán čtverec $KLMN$, $|KL| = 6\,\mathrm{cm}$. Vně čtverce sestrojte bod A tak, aby platilo $|AM| = 3\,\mathrm{cm}$, $|AL| = 4\,\mathrm{cm}$.
Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC tak, aby vrcholy B, C ležely na obvodu čtverce $KLMN$.

44 Kružnice $k_1(O_1; 5\,\mathrm{cm})$, $k_2(O_2; 3\,\mathrm{cm})$, $|O_1O_2| = 4\,\mathrm{cm}$ se protínají ve dvou bodech. Označte C jeden z těchto průsečíků. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky ABC se základnou AB tak, aby platilo
$A \in k_1 \wedge B \in k_2 \wedge |\sphericalangle ACB| = 120°$.

45 Kružnice $k_1(O_1; 4\,\mathrm{cm})$, $k_2(O_2; 2{,}5\,\mathrm{cm})$, $|O_1O_2| = 3\,\mathrm{cm}$ se protínají ve dvou bodech. Označte T jeden z těchto průsečíků. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC tak, aby platilo $A \in k_1$, $B \in k_2$ a bod T byl těžiště trojúhelníku ABC.

46 Je dána kružnice $k(O; 4\,\mathrm{cm})$ a bod A. Sestrojte všechny tětivy XY kružnice k, které mají délku 6 cm a pro které platí, že přímka XY prochází daným bodem A.

a) $|OA| = 3\,\mathrm{cm}$
b) $|OA| = 5{,}5\,\mathrm{cm}$

47 Je dán rovnostranný trojúhelník ABC ($a = 6\,\mathrm{cm}$) a kružnice $k(O; 2{,}5\,\mathrm{cm})$. Střed O zvolte tak, aby platilo $|CO| = |BO| = 5\,\mathrm{cm}$, $k \cap \triangle ABC = \emptyset$. Sestrojte všechny přímky p rovnoběžné se stranou AB tak, aby tětiva, kterou kružnice k vytíná na přímce p, byla stejná jako úsečka XY, kterou přímka p vytíná na trojúhelníku ABC, tj. $X \in p \cap AC$, $Y \in p \cap BC$.

Užití středové a osové souměrnosti ke konstrukci trojúhelníků

48 Je dána úsečka CS_1, $|CS_1| = 3\,\mathrm{cm}$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je úsečka CS_1 těžnicí t_c a pro které dále platí:

a) $a = 3{,}5\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$
b) $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$
c) $b = 8\,\mathrm{cm}$, $\beta = 30°$
d) $\alpha = 30°$, $t_b = 7{,}5\,\mathrm{cm}$

49 Sestrojte všechny trojúhelníky ABC (délky uvedeny v cm), znáte-li:

a) $a + b = 10$, $c = 5$, $v_a = 3$
b) $b + c = 10$, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$
c) $a + b + c = 12$, $\alpha = 45°$, $\beta = 75°$
d) $a + b + c = 12$, $v_c = 3$, $\gamma = 60°$

Výsledky.

34 Osová souměrnost; $O(q)$: $p \to p'$; $Y \in p \cap p'$.

35 Otočení; $R(M; \pm 60^\circ)$: $q \to q'$; $Y \in p \cap q'$.

36 Posunutí; $T(\boldsymbol{AB})$: $k \to k'$; $Y \in p \cap k'$. Nebo $T(\boldsymbol{BA})$: $k \to k'_1$; $Y \in p \cap k'_1$.

37 Středová souměrnost; $S(M)$: $k \to k'$; $C \in p \cap k'$. Úloha má 2 řešení.

38 Otočení; $R(M; \pm 90^\circ)$: $k \to k'$; $C \in p \cap k'$. Úloha má 2 řešení.

39 Osová souměrnost; $O(\leftrightarrow PM)$: $k \to k'$; $C \in p \cap k'$. Úloha má 2 řešení.

40 Otočení; $R(M; \pm 60^\circ)$: $k \to k'$; $B \in p \cap k'$. Úloha má 2 řešení.

41 Posunutí; $T(\boldsymbol{OM})$: $k \to k'$; $L \in p \cap k'$. Úloha má 2 řešení.

42 Osová souměrnost; $O(\leftrightarrow PM)$: $k \to k'$; $A \in p \cap k'$. Úloha má 2 řešení.

43 Otočení; $R(A; \pm 60^\circ)$: $\square\ KLMN \to \square\ K'L'M'N'$; $B \in \square\ KLMN \cap \square\ K'L'M'N'$. Úloha má 2 řešení.

44 Otočení; $R(C; \pm 120^\circ)$: $k_2 \to k'_2$; $A \in k_1 \cap k'_2$. Úloha má 2 řešení.

45 Otočení; $R(T; \pm 120^\circ)$: $k_1 \to k'_1$; $B \in k_2 \cap k'_1$. Úloha má 2 řešení.

46 Otočení. Sestrojte libovolnou tětivu KL délky 6 cm, $A' \in \leftrightarrow KL \cap k(O; 3)$, $R(O; \sphericalangle A'OA)$: $K \to X$, $L \to Y$: a) 2 řešení; b) 2 řešení.

47 Posunutí. V $\triangle ABC$ vyznačte výšku CC_1; $O' \in CC_1 \cap m$, kde m je kolmice z O na CC_1. Potom $T(\boldsymbol{OO'})$: $k \to k'$; $X \in AC \cap k' \wedge Y \in BC \cap k' \Rightarrow p = \leftrightarrow XY$. Úloha má 1 řešení.

Užití středové a osové souměrnosti ke konstrukci trojúhelníků

48 Středová souměrnost;

a) $k(C; 5)$; $S(S_1)$: $k \to k'$; $B \in k' \cap l(C; 3{,}5)$. Úloha má 1 řešení.

b) $\mathsf{G}_{30} = \{X \in \varrho;\ |\sphericalangle CXS_1| = 30^\circ\}$; $S(S_1)$: $\mathsf{G}_{30} \to \mathsf{G}'_{30}$; $B \in \mathsf{G}'_{30} \cap \mathsf{G}_{45}$, kde $\mathsf{G}_{45} = \{X \in \varrho;\ |\sphericalangle CXS_1| = 45^\circ\}$. Úloha má 2 řešení.

c) $k(C; 8)$; $S(S_1)$: $k \to k'$; $B \in k' \cap \mathsf{G}_{30}$, kde $\mathsf{G}_{30} = \{X \in \varrho;\ |\sphericalangle CXS_1| = 30^\circ\}$. Úloha má 2 řešení.

d) Těžiště $T \in CS_1$, $|CT| = 2$; $k(T; \frac{2}{3}t_b = 5)$ $S(S_1)$: $k \to k'$; $A \in k' \cap \mathsf{G}_{30}$, kde $\mathsf{G}_{30} = \{X \in \varrho;\ |\sphericalangle CXS_1| = 30^\circ\}$. Úloha má 2 řešení.

49 Osová souměrnost;

a) $\triangle ABX$, $|AB| = 5$, $|BX| = a + b = 10$, výška na BX je 3; $C \in BX \cap o$, kde o je osa strany AX. Úloha má 2 řešení.

b) $\triangle XBC$, $|XB| = b + c = 10$, $|\sphericalangle XBC| = \beta = 60^\circ$, $|\sphericalangle BXC| = \frac{\alpha}{2} = 22^\circ 30'$. Potom $A \in XB \cap o$, kde o je osa strany XC. Úloha má 1 řešení.

c) $\triangle XYC$, $|XY| = b + c + a = 12$, $|\sphericalangle CXY| = \frac{\alpha}{2}$, $|\sphericalangle XYC| = \frac{\beta}{2}$. $A \in XY \cap o_1$, kde o_1 je osa strany XC, $B \in XY \cap o_2$, kde o_2 je osa strany YC. Úloha má 1 řešení.

d) $\triangle KLC$, $|KL| = b + a + c = 12$, $C \in p \cap \mathsf{G}_{120}$, kde $p \parallel KL$ ve vzdálenosti 3 cm, $\mathsf{G}_{120} = \{X \in \varrho;\ |\sphericalangle KXL| = 120^\circ\}$; úhel KCL je 120°, protože $|\sphericalangle KCL| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ + \frac{\gamma}{2} = 120^\circ$. Označme o_1, o_2 osy stran KC, LC. Potom $A \in o_1 \cap KL$, $B \in o_2 \cap KL$. Úloha má 2 řešení.